

$$\begin{cases} f : R \rightarrow (0, +\infty) \\ f(x) = a^x \quad a > 0, a \neq 1 \end{cases}$$

- تابع نمایی به صورت زیر تعریف می شود:

- رسم تابع نمایی:

ایمان کاظمی



نکته: تابع نمایی یک به یک است زیرا اگر خطی موازی محور  $x$  ها رسم کنیم تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.  
نکته: اگر دو عبارت تواندار با پایه های مساوی، مساوی باشند، توانها نیز با هم مساوی خواهند بود.

$$a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$$

مثال ۱: تابع  $y = a^x$  برای  $a > 1$  ..... و برای  $a < 1$  ..... است. (۰)  $a$

(۱) نزولی - صعودی (۲) نزولی - نزولی (۳) صعودی - نزولی (۴) صعودی - صعودی

مثال ۲: عبارت زیر را ساده کنید.

$$۱) \frac{۸\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۱۸}}{۱۶\sqrt{۲} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\sqrt{۲}}}$$

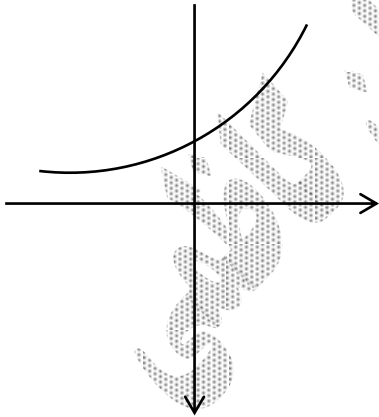
$$۲) (\sqrt{۵} - ۲)^{\sqrt{۲}+1} \times (\sqrt{۵} + ۲)^{\frac{1}{\sqrt{۲}-1}}$$

مثال ۳: به ازای چه مقداری از  $a$  با افزایش  $x$  در  $y = (a^2 - 3a + 3)^x$  تابع، مقدار  $y$  هم افزایش می یابد؟

(۱)  $a \in [-۲, -۱]$  (۲)  $a \in [۱, ۲]$  (۳)  $a \in R - [۱, ۲]$  (۴)  $a \in R - [-۲, -۱]$



مثال ۴: به ازای کدام مقادیر  $k$ ، نمودار تابع نمایی  $y = (4 - |k|)x^2 + 3^{kx}$ ، بصورت شکل مقابل است؟



مثال ۵: مقدار  $x$  از معادله  $(\frac{1}{2})^{2x-3} = 4 \times 16^{-x}$  کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

مثال ۶: مقدار  $x$  از معادله  $(\frac{1}{8})^{3x} = 32^{x+1}$  برابر است با:

$$-\frac{5}{14} \quad (4)$$

$$\frac{1}{8} \quad (3)$$

$$\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{14}{5} \quad (1)$$

مثال ۷: مجموع ریشه های معادله  $25^{x+1} = 8^{x^2+1}$  چقدر است؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$3 \text{ صفر} \quad (3)$$

$$\frac{5}{3} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$



مثال ۸: معادله  $9^x + 6^x - 2 \times 4^x = 0$  چند ریشه دارد؟

۴(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۱(۱)

مثال ۹: مجموعه جواب نامعادله  $(\sqrt{2}-1)^{x-1} < \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{2x+1}$  کدام است؟

 $x < -\frac{3}{2}$  (۴) $x > -\frac{3}{2}$  (۳) $x < -2$  (۲) $x > -2$  (۱)

$$\log_a^x = b \Leftrightarrow a^b = x$$

تعریف تابع لگاریتم:

مثال ۱۰: اگر  $\log_{16} N = \frac{3}{2}$  ، کدام است  $N$  ؟

۶۴(۴)

۳۲(۳)

۸(۲)

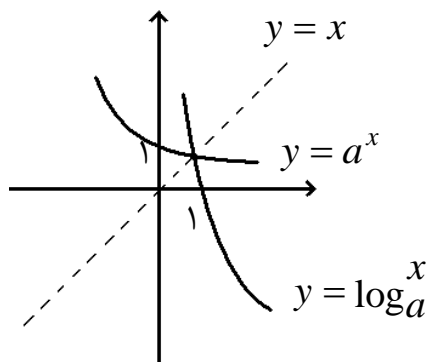
$\frac{1}{8}$ (۱)

نکته: تابع لگاریتم، معکوس تابع نمایی است که به صورت زیر تعریف می شود:

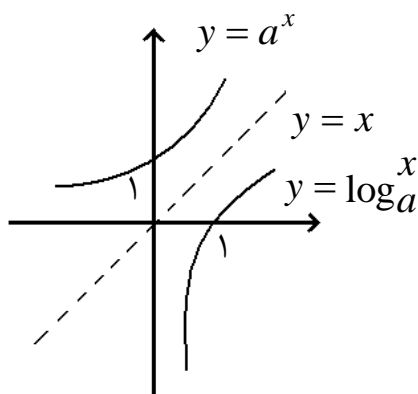
$$\begin{cases} g : (\cdot, \infty) \rightarrow R \\ g(x) = \log_a^x \quad a > \cdot, a \neq 1 \end{cases}$$

تذکر: اگر پایه لگاریتم عدد ۱۰ باشد، نیازی به نوشتن آن نیست مثلا  $\log_{10}^5 = \log 5$ .

- رسم تابع لگاریتم: نمودار تابع لگاریتم قرینه نمودار تابع نمایی  $y = a^x$  نسبت به خط  $y = x$  است.



(۱)  $0 < a < 1$



(۲)  $a > 1$



نکته:

نکته: اگر  $e = ۲/۷۱۸۲۷$  (عدد نپر) مبنای لگاریتم باشد، لگاریتم را لگاریتم طبیعی می نامند و آن را به صورت

$$\log_e^x = \ln x$$

ln نمایش می دهند و داریم:

نکته: خواص توابع لگاریتمی:

$$۱) \log_a^a = ۱$$

$$۲) \log_a^1 = ۰ \quad a > ۰, a \neq ۱$$

$$۳) \log_a^{uv} = \log_a^u + \log_a^v$$

$$۴) \log_a^{\left(\frac{u}{v}\right)} = \log_a^u - \log_a^v$$

$$۵) \log_{\frac{u}{v}}^a = \frac{a}{b} \log_v^u$$

$$۶) a^{\log_a^u} = u$$



$$۷) u \log_a^v = v \log_a^u$$

$$۸) \log_b^a \times \log_a^b = ۱$$

$$۹) \log_b^a \times \log_c^b \times \dots \times \log_v^u \times \log_z^v = \log_z^a$$

$$۱۰) \log_b^a = \frac{\log_m^a}{\log_m^b}$$

مثال ۱۱: اگر  $\log ۲ \cong ۰/۳$  و  $\log ۳ \cong ۰/۴۷$  مطلوبست:

الف)  $\log ۶ =$

ب)  $\log ۵ =$

ج)  $\log ۲۰ =$

مثال ۱۲: اگر  $\log ۲ = a$  و  $\log ۳ = b$  و  $\log ۷ = c$  باشد، مطلوب است حاصل:

الف)  $\log ۴۸ =$

ب)  $\log ۶۳ =$

ج)  $\log ۳۰ =$

د)  $\log ۹۸ =$



مثال ۱۳: اگر  $\log 2 = 0.301$  و  $\log 3 = 0.477$  باشد،  $\log 6000$  برابر است با:

۳/۷۷۸(۴)

۴/۷۷۸(۳)

۲/۷۸۸(۲)

۳/۲۲۲(۱)

مثال ۱۴: اگر  $\log_a 3\sqrt{3} = \frac{3}{4}$ ، آنگاه  $\log_4(a-1)$  کدام است؟

$-\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)

مثال ۱۵: حاصل  $[\log_6^2] + [\log_6^6]$  برابر است با: ( [ ] نماد جزء صحیح است)

صفر(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۱(۱)

مثال ۱۶: اگر  $17 < N < 60$  باشد، آنگاه  $\log_7^N$  بین کدام دو عدد قرار دارد؟

۷ و ۵(۴)

۷ و ۴(۳)

۶ و ۴(۲)

۵ و ۳(۱)





مثال ۱۷: حاصل  $\log_{1+\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^3$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$       (۲) ۳      (۳) ۶      (۴)  $\frac{2}{3}$

مثال ۱۸: اگر لگاریتم  $a$  در پایه  $\sqrt{3}$  برابر  $\frac{4}{3}$  باشد، آنگاه لگاریتم  $(a^3 + 7)$  در پایه ۸ کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$       (۲)  $\frac{4}{3}$       (۳)  $\sqrt{2}$       (۴)  $\frac{3}{2}$  (سراسری تجربی-۸۷)

مثال ۱۹: اگر  $\log_{\frac{3}{2}} a = \log_{\frac{2}{3}} a$  باشد،  $\log_{\frac{2}{3}} a$  کدام است؟ (آزاد تجربی - ۸۰)

- (۱)  $\frac{a-1}{2a}$       (۲)  $\frac{1-a}{2a}$       (۳)  $\frac{1-a}{a}$       (۴)  $\frac{a-1}{a}$

مثال ۲۰: اگر  $\log 2 + \log 3 = a$  و  $\log 3 + \log 7 = b$  و  $\log 2 + \log 7 = c$  باشد،  $\log 42$  چقدر است؟

$$\sqrt{abc} \quad (۴)$$

$$\sqrt{a+bc} \quad (۳)$$

$$\frac{a+b+c}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{abc}{2} \quad (۱)$$

مثال ۲۱: لگاریتم عددی از لگاریتم عکس مجذور آن در پایه ۹ به اندازه ی  $\frac{4}{5}$  واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟

$$۱۸(۴)$$

$$۲۷(۳)$$

$$۳۶(۲)$$

$$۸۱(۱)$$

مثال ۲۲: اگر  $4^a = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم  $(4a+1)$  در پایه ۴ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۸)

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$۲(۳)$$

$$\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$۱(۱)$$



مثال ۲۳: اگر  $\log 6 = a$  و  $\log 3 = b$  حاصل  $\log 25$  کدام است؟

(۴)  $2(1-a-b)$

(۳)  $2(1-a+b)$

(۲)  $2(1+a+b)$

(۱)  $2(1+a-b)$

مثال ۲۴: اگر  $\log 2 = k$  باشد، حاصل  $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5})$  کدام است؟ (تجربی - ۹۰)

(۴)  $2 + 2k$

(۳)  $1 + k$

(۲)  $4k$

(۱)  $2k$

- معادلات و نامعادلات لگاریتمی:

مثال ۲۵: از دو معادله دو مجهولی  $2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1$  و  $\log y = 2\log 3 + \log x$ ، مقدار  $y$  کدام است؟ (تجربی - ۹۶)

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱



مثال ۲۶: از معادله ی  $\log(2x-1) + \log(x+3) = \log 30 - \log 2$  مقدار  $\log_8 x$  کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

مثال ۲۷: با فرض  $\log(x+1) = \frac{1}{3} \log(x^3 + x^2 + 3)$  ، حاصل  $\log_3(4|x|+1)$  کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

مثال ۲۸: در دستگاه معادله های  $\begin{cases} 2^x = 3^y \\ x + y = 1 \end{cases}$  مقدار  $x$ ، کدام است؟

$$\log_2 2 \quad (4)$$

$$\log_2 3 \quad (3)$$

$$\log_6 2 \quad (2)$$

$$\log_6 3 \quad (1)$$

مثال ۲۹: از معادله  $\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x + 3)$ ، مقدار لگاریتم  $(x - 3)$  در مبنای ۴ کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۸۸)

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

مثال ۳۰: اگر  $\log xy^2 = 2$  و  $\log x^2 y = 4$  حاصل  $\log xy^4$  چقدر است؟

$$6 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

مثال ۳۱۱: از معادله ی لگاریتمی  $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$  ، مقدار لگاریتم  $(2x - 1)$  در پایه ۸ ، کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۵)

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (۱)$$

مثال ۳۱۲: مجموعه جواب نامعادله ی  $\log\left(\frac{x+3}{5}\right) < -1$  کدام است؟

$$\frac{5}{2} < x < 3 \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} < x < 2 \quad (۳)$$

$$-2 < x < -\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$-3 < x < -\frac{5}{2} \quad (۱)$$

مثال ۳۱۳: چند عدد صحیح در نامعادله ی  $\log_{\frac{1}{2}}(3-2x) \geq -1$  صدق می کند؟

$$(۴) \text{ بی شمار}$$

$$۳(۳)$$

$$۲(۲)$$

$$۱(۱)$$

کاربرد تابع لگاریتمی

اگر میزان انرژی آزاد شده در زلزله ای به بزرگی  $M$  ریشتر برابر  $E$  باشد، داریم:

$$\log E = 11/8 + 1/5M \rightarrow E = 10^{11/8 + 1/5M}$$

مثال ۳۳: اگر بزرگی زلزله ای برابر ۶ ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را بدست آورید.

مثال ۳۵: اگر در یک زلزله  $10^{20}$  ارگ انرژی آزاد شود، شدت زلزله تقریباً چند ریشتر است؟

۵/۱۲ (۴)

۵/۴۷ (۳)

۵/۹۲ (۲)

۶/۱۲ (۱)